Μαθημα 13ο 14/1/2019

ΑΕΣΔΕ

Επαναληψη προηγουμενα

ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

1. Χαμηλης ταξης μονοβηματικες μεθ. (Euler, πεπλ. Euler, Τραπ., Μεσου)
2. RK μονοβ. μεθ.
3. Πολυβηματικες μεθοδοι

Πολυβηματικες μεθοδοι

{οπισθιες, εμπροσθιες, κεντρικες διαφορες}

Παραδειγμα 1

$y'(t) = f(t, y(t))$ → η αναφορες

Τυπος οπισθιων διαφορων στο t_n: $y'(t_n) = \dfrac{y(t^n) - y(t^{n-1})}{h}$

Τυπος εμπροσθιων πεπερ. διαφορων: $y'(t_n) = \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$

Τυπος κεντρικων πεπερ. διαφορων: $y'(t_n) = \dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^{n-1})}{2h}$

Αρα εχουμε $y'(t^{n+1}) \simeq \dfrac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \simeq f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) \Rightarrow$

$y(t^{n+2}) \simeq y(t^n) + 2h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$

εαν θεωρησω οτι ειναι προσεγγισεις τοτε γραφω

$y^{n+2} = y^n + 2h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ Διβηματική μεθοδος αμεση.

Ολοκληρωνοντας καταληγω στην ιδια μεθοδο

▸ $y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3} [f(t^n, y^n) + 4 f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2})]$

Πεπλεγμενη διβηματική μεθοδος.

$$\left\{ \int_c^d f\,dx = \frac{d-c}{6} \left[f(c) + 4 \cdot f\left(\frac{c+d}{2}\right) + f(d) \right] \right\}$$ Κανονας Simpson.

Ορισμος

Εχω κ-βηματική μεθοδο, $y^0, y^1, \dots, y^{k-1}$ κ-δεδομενα τοτε η μεθοδος γραφεται ως εξης

(*) $a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h(b_k f^{n+k} + b_{k-1} f^{n+k-1} + \dots + b_0 f^n)$

οπου $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, b_k, \dots, b_0$ και $a_k \neq 0$ ειναι $2k+2$ σταθεροι συντελεστες.

1) $b_k = 0$ η μεθοδος ειναι αμεση

2) $b_k \neq 0$ η μεθοδος ειναι πεπλεγμενη.

αν εχω N διαστηματα, θα εχω N+1 σημεια και θα λυσω N εξισωσεις οσες τα διαστηματα

■ Πλεονεκτηματα των κ-βηματικων μεθοδων

1) λιγοτερο δαπανηρες απο τις RK

α) Αμεσες: 1 συναρτησιακο υπολογισμο ∀βημα

για RK: q συναρτ. υπολογισμοι

β) Πεπλεγμενες: N εξισωσεις για τον υπολογισμο της y στο [a,b]

για RK: λυνω qN×qN συστημα

■ Μειονεκτημα των κ-βηματικων μεθοδων

1) Υστερουν στην ευσταθεια

■ Αναδρομες διαφορες

$\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$ ή $\nabla^j y^n = \nabla^{j-1}(\nabla y^n) = \nabla^{j-1}(y^n - y^{n-1})$

2. Λαπλασιανή διαφορά

$$\nabla^2 y^n = \nabla(\nabla y^n) = \nabla(y^n - y^{n-1}) = \nabla y^n - \nabla y^{n-1} = y^n - y^{n-1} - y^{n-1} + y^{n-2} =$$
$$= y^n - 2y^{n-1} + y^{n-2}$$

2. κ-πολυβηματική μέθοδος αναδρομικών διαφορών κ-βημάτων

$$\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{k-1} & \text{κ-δεδομένα} \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h f^{n+k} & , n = 0, 1, 2, \ldots, k-1 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ#

1) $k=1$, $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = 1$.

Πεπλεγμένη Euler $\boxed{\text{όταν δε μου δίνει τους άλλους όρους τους θεωρώ 0}}$

$a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h(b_1 f^{n+1} + \underbrace{b_0}_{=0} f^n)$ αριθμητικό σχήμα

$y^{n+1} - y^n = h f^{n+1}$ πεπλεγμ. Euler.

Είναι συνεπής, ευσταθής άρα συγκλίνει εκτός τυχαίου δίσκου.

2) $k=2$, $a_2 = 1$, $a_1 = -\frac{4}{3}$, $a_0 = \frac{1}{3}$, $b_2 = \frac{2}{3}$ $[b_1 = 0 = b_0]$

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h(b_2 f^{n+2} + \overset{0}{b_1} f^{n+1} + \overset{0}{b_0} f^n) \Rightarrow$$

$y^{n+2} - \frac{4}{3} y^{n+1} + \frac{1}{3} y^n = h \frac{2}{3} f^{n+2}$ → πεπλεγμένη λόγω αυτού του όρου

2. Παρατήρηση

Οι κ-βηματικές μεθ. της μορφής: $\begin{cases} y^0, y^1, \ldots, y^{k-1}, & k \text{ δεδομένα} \\ y^{n+k} - y^{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f^{n+j} \end{cases}$

λέγονται adams. Οι άμεσες (Adams-Bashforth) : $b_k = 0$.

Οι πεπλεγμένες Adams-Moulton : $b_k \neq 0$

Ευστάθεια S.O.S (!)

Ορισμός: Μια κ-βημ. μέθοδος λέγονται ευσταθείς αν $\exists C$ που δεν εξαρτάται από το h τ.ω να ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| = C \max_{j=0,1,\ldots,k-1} |y^j - z^j|$$

30/5

Ορισμός: Η πολυβηματική μέθοδος (*) πληροί τη συνθήκη των ριζών αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ρ ορίζεται ως $\rho(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 z^0$ ισχύουν:

1) $\rho(z)=0 \Rightarrow |z| \leq 1$

2) $\rho(z)=\rho'(z)=0 \Rightarrow |z|<1$

→ Οι ρίζες στην ουσία μου λένε αν είναι η μέθοδος ευσταθής ή όχι

Πρόταση

Μια κ-βηματική μέθοδος εάν είναι ευσταθής τότε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο $\rho(z)$ ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Αντίστροφα αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho(z)$ της κ-βηματικής μεθόδου ικανοποιεί τη συνθήκη ριζών τότε η μέθοδος είναι ευσταθής.

→ = δηλ. ένα είδος τοπικού σφάλματος

▸ Θεωρώ τη ποσότητα $(a_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - b_j y'(t+jh)]$

Ορισμός Τάξη ακρίβειας πολυβηματικής μεθόδου

Εάν p ο μεγαλύτερος ακέραιος τ.ώ.:

$\exists\, C=C(y): \forall t \in [a, b-kh] : |a_h y(t)| \leq C h^{p+1}$

τότε η τάξη ακρίβειας της πολυβηματικής μεθόδου είναι p

Παρατήρηση

Αν η τάξη p, τουλάχιστον 1 τότε η μέθοδος λέγεται συνεπής ($p \geq 1$)

→ RK: αν $p \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$, $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$

▸ Ανάπτυγμα κατά Taylor

$y(t+jh)$, $y'(t+jh)$ τότε

$(a_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 y'(t) + C_2 y''(t) + C_3 y'''(t) + \dots$, C_i, $i=0,1,2,3,\dots$ σταθερές.

$C_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$, $C_1 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + k a_k - (b_0 + b_1 + \dots + b_k)$

$C_j = \frac{1}{j!}(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \dots + k^j a_k) - \frac{1}{(j-1)!}(b_1 + 2^{j-1} b_2 + 3^{j-1} b_3 + \dots + k^{j-1} b_k)$

▶ Για να δειξω οτι η μεθοδος ειναι ακριβειας p τοτε

$$c_0 = c_1 = \dots = c_p = 0 \quad \& \quad c_{p+1} \neq 0$$

■ <u>Παρατηρηση</u>

Εαν $c_0 = c_1 = 0 \Rightarrow$ η πολυβηματικη μεθοδος ειναι συνεπης.